Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 16 октября 2010.

Третий тур. Лига стратегий

1. В прямоугольнике 2009×2010 клеток каждая из клеток окрашена в один из трех цветов, причем все клетки, лежащие на границе прямоугольника, окрашены в цвета 1, 2, 3, 1, 2, 3 и т. д. по циклу. Клетка (в том числе и граничная) называется *хорошей*, если среди цветов ее соседей по стороне присутствуют все цвета, а любые 2 противоположных соседа разноцветные. Докажите, что в этом прямоугольнике не менее двух хороших клеток.

2. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а лучи AB и DC — в точке F. Прямая FE пересекает дугу AD описанного вокруг четырехугольника окружности в точке M, а прямая проходящая через точку C и параллельная прямой AD — в точке N. Прямые MN и AD пересекаются в точке K, а прямые CM и AD — в точке L. Докажите, что точки B, C, L и K лежат на одной окружности.

3. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^7}{b^3c^2} + \frac{b^7}{c^3a^2} + \frac{c^7}{a^3b^2} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

4. Дан многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами и комплексное число w такое, что $|w| = 1$. Пусть $p(w) = c$, причем число c вещественное. Докажите, что существует многочлен $q(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $c = q\left(w + \frac{1}{w}\right)$.

5. Докажите, что существует вещественное число $c > 0$, обладающее следующим свойством: среди любых n попарно различных натуральных чисел ($n > 2$) существуют три таких, что их НОК больше чем $cn^{2.99}$.

6. Пусть $x > 1$ — вещественное нецелое число. Докажите, что последовательность $a_n = [x^{n+1}] - x[x^n]$ не является периодической ни с какого места.

7. В графе G все вершины имеют степень 100. Вершины G окрашены в пять цветов. Может ли так оказаться, что в каждом цикле встречаются вершины не менее, чем трех цветов?

8. Дано натуральное число n и несколько прямых на координатной плоскости (возможно, совпадающих) таких, что ни одна из этих прямых не проходит через точку $(0, 0)$, и через каждую целую точку (a, b), где $0 \leqslant a, b \leqslant n$ и $a + b > 0$, проходит не менее $a+b+1$ прямых. Какое наименьшее количество прямых могло быть проведено?

9. В выпуклом многограннике через любые 4 вершины, три из которых (но не все четыре) лежат в одной грани, можно провести сферу радиуса не более 1. Докажите, что для любой точки внутри многогранника расстояние от нее до одной из вершин не превосходит 1.

10. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса BL и высота BH. Обозначим через B' точку касания касательной к вписанной окружности ABC, проведенной из L и отличной от LH, а через F — точку Фейербаха треугольника ABC. Докажите, что точки F, B', L и H лежат на одной окружности.